Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\quad \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\, dy\, dz.$$

Von **Franz Unferdinger,**

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Jänner 1870.)

§. 1.

Betrachtet man x, y, z als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes M im Raume vom Ursprunge O, so bezeichnen die drei folgenden Gleichungen, in welchen α, β, γ constante Zahlen sind

$$(1)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{\alpha p}{\rho}-\dfrac{r\sin\theta\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}{\rho}, \\ y=\dfrac{\beta p}{\rho}+\dfrac{r}{\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}\left\{\gamma\cos\theta+\dfrac{\alpha\beta}{\rho}\sin\theta\right\}, \\ z=\dfrac{\gamma p}{\rho}-\dfrac{r}{\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}\left\{\beta\cos\theta-\dfrac{\alpha\gamma}{\rho}\sin\theta\right\}, \end{cases}$$

mit

$$(2)\qquad \rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

die Einführung eines neuen Coordinatensystems, dessen Elemente p, r, θ sind.

Multiplicirt man dieselben der Ordnung nach mit α, β, γ und addirt, so zeigt sich nach kurzer Rechnung:

$$(3)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=\rho p,$$

diese Gleichung bezeichnet eine Ebene im Abstand p vom Ursprung, deren Richtung durch die Constanten α, β, γ bestimmt wird. Für

alle Punkte in dieser Ebene hat p denselben Werth und der Fußpunkt P dieser Senkrechten hat im System der xyz die Coordinaten:

$$(4) \qquad x_0 = \frac{\alpha p}{\rho}, \quad y_0 = \frac{\beta p}{\rho}, \quad z_0 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Werden die Gleichungen (1) quadrirt und dann addirt, so erhält man mit Anwendung der Gleichung (2) nach gehöriger Reduction:

$$(5) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + r^2,$$

diese Gleichung zeigt, daß das Dreieck OPM rechtwinkelig ist bei P und es ist $PM = r$; der Leitstrahl r liegt also in der Ebene (3) und bezeichnet die Entfernung des Punktes M vom Fußpunkt P der Senkrechten p. Wir wollen die letztere die Pollinie und P den Pol nennen. Werden r und p aus den Gleichungen (1) eliminirt, so folgt:

$$(6)$$
$$(\rho^2 - \alpha^2)\cos\theta \,.\, x + (\gamma\rho\sin\theta - \alpha\beta\cos\theta)\,.\, y - (\beta\rho\sin\theta + \alpha\gamma\cos\theta)\,.\, z = 0,$$

diese Gleichung bezeichnet nach x, y, z eine durch den Ursprung O gehende Ebene, welche auf jener (3) senkrecht steht, dieselbe geht also durch die Pollinie p und r liegt im Durchschnitt der Ebenen (3) und (6). Für alle Punkte (xyz), welche in dieser Ebene liegen, hat θ denselben Werth.

Bezeichnen λ, μ, ν die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche eine in O auf die Ebene (6) errichtete Senkrechte mit den positiven Halbaxen der x, y, z einschließt, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$(7) \qquad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}\cos\theta}{\rho}, \\ \cos\mu = \dfrac{\gamma\rho\sin\theta - \alpha\beta\cos\theta}{\rho\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}, \\ \cos\nu = -\dfrac{\beta\rho\sin\theta + \alpha\gamma\cos\theta}{\rho\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung (6) $\theta = 0$, so wird

$$(8) \qquad (\rho^2 - \alpha^2)\, x - \alpha\beta y - \alpha\gamma z = 0$$

und hierdurch ist diejenige Ebene bezeichnet, für deren sämmtliche Punkte im neuen Coordinatensystem $\theta = 0$ ist.

Sind λ_0, μ_0, ν_0 die dieser Ebene (8) entsprechenden Werthe von λ, μ, ν, so ist nach (7):

$$(9) \qquad \begin{cases} \cos\lambda_0 = \dfrac{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\rho}, \\ \cos\mu_0 = -\dfrac{\alpha\beta}{\rho\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}, \\ \cos\nu_0 = -\dfrac{\alpha\gamma}{\rho\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}} \end{cases}$$

und eine kurze Rechnung lehrt, daß

$$\cos\lambda\cos\lambda_0 + \cos\mu\cos\mu_0 + \cos\nu\cos\nu_0 = \cos\theta;$$

die beiden Ebenen (6) und (8), welche beide durch die Pollinie gehen, also auf jener (3) senkrecht stehen, schließen unter sich den Winkel θ ein. Dieser Winkel ist gebildet von dem Leitstrahl r und der Durchschnittslinie der Ebenen (3) und (8). Wir wollen diese letztere Gerade die Polaxe nennen. Die Gleichungen derselben im System der xyz sind:

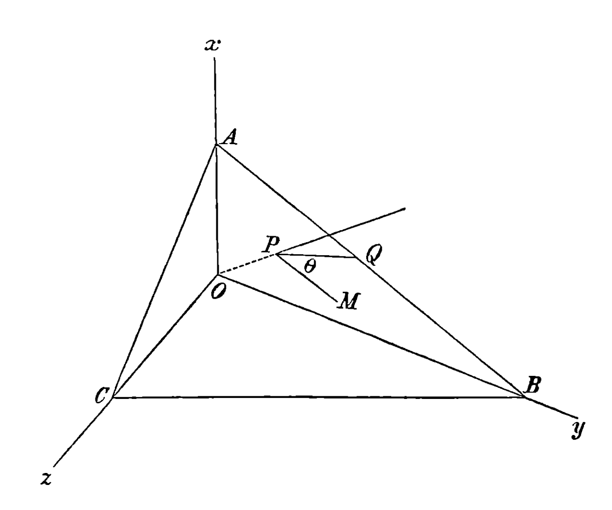
$$(10) \qquad \begin{cases} \beta y + \gamma z = \rho p - \alpha x, \\ \beta y + \gamma z = \dfrac{\rho^2 - \alpha^2}{\alpha} x \end{cases}$$

und man erkennt leicht, daß sie parallel ist zur Durchschnittslinie der Ebene (3) mit der Ebene der yz; denn die Gleichung der letzteren ist:

$$\beta y + \gamma z = \rho p$$

und die gedachte Durchschnittslinie liegt in der Ebene (3).

Fig. 1.



Alles Vorhergehende zusammengefaßt gibt nun folgende Construction der neuen Coordinaten p, r, θ: Bezeichnet M (Fig. 1) irgend einen Punkt des Raumes, welcher auf das neue Coordinatensystem bezogen werden soll, so lege man durch denselben die Ebene (3) ABC, deren Richtung durch die Constanten α, β, γ bestimmt ist und fälle vom Ursprung O darauf eine Senkrechte OP, die Länge derselben ist p und der Fußpunkt P ist der Pol, $PM = r$ ist der Leitstrahl. Zieht man nun durch P in der Ebene ABC eine Parallele PQ zum Durchschnitt derselben mit der Ebene der yz, so ist der Winkel $MPQ = \theta$. Der quantitative Zusammenhang der Coordinaten p, r, θ mit den rechtwinkeligen x, y, z wird durch die Gleichungen (1) dargestellt.

Aus den Gleichungen (1) folgt auch:

$$\alpha p - \rho x = r \sin\theta \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}, \quad \gamma y - \beta z = r \cos\theta \sqrt{\rho^2 - \alpha^2},$$

mithin durch Division und Anwendung der Gleichung (3):

$$(11) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\beta(\alpha y - \beta x) + \gamma(\alpha z - \gamma x)}{\rho\,(\gamma y - \beta z)},$$

womit θ als Function der ursprünglichen Coordinaten dargestellt wird. Diese Gleichung in Verbindung mit den beiden folgenden:

$$(12)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\rho}, \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}{\rho^2}, \end{cases}$$

geben überhaupt die Auflösung der Gleichungen (1) nach p, r, θ.

Aus (11) erhält man nach kurzer Rechnung:

$$(13)\quad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\beta(\alpha y - \beta x) + \gamma(\alpha z - \gamma x)}{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)\{(\alpha y - \beta x)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\gamma y - \beta z)^2\}}}, \\ \cos\theta = \dfrac{\rho(\gamma y - \beta z)}{\sqrt{(\rho^2 - \alpha^2)\{(\alpha y - \beta x)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\gamma y - \beta z)^2\}}}. \end{cases}$$

Der Werth von $\operatorname{tg}\theta$ folgt auch aus der Gleichung (6) nach Division mit $\cos\theta$, so daß also diese von jener (11) nicht wesentlich verschieden ist.

§. 2.

Wir schreiten nach dieser Vorbereitung zur Transformation des folgenden dreifachen Integrals, in welchem F eine beliebige Function bezeichnet und die Grenzen noch offen gelassen werden:

$$(14)\quad u = \iiint F(x^2 + y^2 + z^2,\ \alpha x + \beta y + \gamma z)\, dx\, dy\, dz.$$

Führt man statt x, y, z drei neue Veränderliche p, r, θ ein, im Sinne der Gleichungen (1), so ist bekanntlich $dx\, dy\, dz$ zu ersetzen durch $\Omega\, dp\, dr\, d\theta$, wobei nach Lagrange:

$$(15)$$

$$\Omega = \frac{dx}{dp}\left(\frac{dy}{dr}\frac{dz}{d\theta} - \frac{dy}{d\theta}\frac{dz}{dr}\right) + \frac{dy}{dp}\left(\frac{dz}{dr}\frac{dx}{d\theta} - \frac{dz}{d\theta}\frac{dx}{dr}\right) + \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{dr}\right);$$

nun geben die Gleichungen (1) nach einiger Rechnung:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{\alpha}{\rho}, \\ \dfrac{dy}{dp} = \dfrac{\beta}{\rho}, \end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dp} = \dfrac{\gamma}{\rho}, \\ \dfrac{dx}{dr} = -\dfrac{\sin\theta\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}{\rho}, \\ \dfrac{dy}{dr} = -\dfrac{\alpha z-\gamma x}{\beta z-\gamma y}\cdot\dfrac{dx}{dr} - \dfrac{\gamma r}{\beta z-\gamma y}, \\ \dfrac{dz}{dr} = -\dfrac{\beta x-\alpha y}{\beta z-\gamma y}\cdot\dfrac{dx}{dr} + \dfrac{\beta r}{\beta z-\gamma y}, \\ \dfrac{dx}{d\theta} = -\dfrac{\gamma y-\beta z}{\rho}, \\ \dfrac{dy}{d\theta} = -\dfrac{\alpha z-\gamma x}{\rho}, \\ \dfrac{dz}{d\theta} = -\dfrac{\beta x-\alpha y}{\rho} \end{cases}$$

und hiermit wird:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dr}\dfrac{dz}{d\theta} - \dfrac{dy}{d\theta}\dfrac{dz}{dr} = \dfrac{\alpha r}{\rho}, \\ \dfrac{dz}{dr}\dfrac{dx}{d\theta} - \dfrac{dz}{d\theta}\dfrac{dx}{dr} = \dfrac{\beta r}{\rho}, \\ \dfrac{dx}{dr}\dfrac{dy}{d\theta} - \dfrac{dx}{d\theta}\dfrac{dy}{dr} = \dfrac{\gamma r}{\rho}, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \Omega = r.$$

Das dreifache Integrale (14) verwandelt sich durch die Einführung der neuen Variabelen p, r, θ in folgendes:

$$(19)\qquad u = \iiint F(p^2+r^2,\ \rho p),\ dp\, r\, dr\, d\theta.$$

§. 3.

Damit u einen bestimmten Werth erhält, setzen wir fest, daß die drei Integrationen in (14) auf alle positiven und negativen Werthe von x, y, z erstreckt werden sollen, welche gleichzeitig die drei Bedingungen erfüllen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 < x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ \pm g_0 \rho < \alpha x + \beta y + \gamma z < g_1 \rho \\ t_0 < \dfrac{\beta(\alpha y - \beta x) + \gamma(\alpha z - \gamma x)}{\rho(\gamma y - \beta z)} < t_1, \end{cases}$$

dann sind vermöge der Gleichungen (3), (5), (11) die Integrationen in (19) auf alle Werthe von p, r, θ zu erstrecken, welche zugleich den Bedingungen entsprechen:

$$(21)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 < p^2 + r^2 < 1, \\ \pm g_0 < p < g_1, \\ \theta_0 < \theta < \theta_1, \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(22)\qquad \theta_0 = \text{arc.}\operatorname{tg} t_0, \qquad \theta_1 = \text{arc.}\operatorname{tg} t_1.$$

In geometrischer Auffassung heißt dieses, die Integrationen in (14) sind auf alle Punkte (xyz) auszudehnen, welche zwischen den beiden concentrischen Kugelflächen:

$$(23)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2 \end{cases}$$

zwischen den beiden parallelen Ebenen:

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = g_1 \rho, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \pm g_0 \rho \end{cases}$$

und zwischen den beiden durch die Pollinie gehenden Ebenen:

$$(25)\qquad \begin{cases} (\rho^2 - \alpha^2) x + (\gamma \rho t_1 - \alpha\beta) y - (\beta \rho t_1 + \alpha\gamma) z = 0, \\ (\rho^2 - \alpha^2) x + (\gamma \rho t_0 - \alpha\beta) y - (\beta \rho t_0 + \alpha\gamma) z = 0 \end{cases}$$

enthalten sind.

Dabei bezeichnen g_1, g_0 die Entfernungen der Parallelebenen (24) vom Ursprung O, welcher der Mittelpunkt der Kugeln (23) ist und da wir voraussetzen

$$(26)\qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

so liegt die zweite Grenzkugel im Innern der ersten.

Für das untere Vorzeichen in (24) liegen die Parallelebenen auf entgegengesetzter Seite des Mittelpunktes O.

Um entsprechend diesen Bedingungen die Integrationsgrenzen für das Integrale (19) zu bestimmen, unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem:

$$(27)\qquad \begin{cases} g_0 < 1, & g_1 < 1, \\ g_0 < \varepsilon, & g_1 < \varepsilon, \end{cases} \quad \begin{cases} g_0 < 1, & g_1 < 1, \\ g_0 < \varepsilon, & g_1 > \varepsilon, \end{cases} \quad \begin{cases} g_0 < 1, & g_1 < 1, \\ g_0 > \varepsilon, & g_1 > \varepsilon. \end{cases}$$

Im ersten Fall schneiden die Parallelebenen (24) beide Kugelflächen, die Werthe von p in (21) sind in ihrem ganzen Intervall kleiner als ε und die erste Bedingung in (21), welche auch so geschrieben werden kann:

$$(28)\qquad \sqrt{\varepsilon^2 - p^2} < r < \sqrt{1 - p^2},$$

ist immer nach r reel erfüllbar; man hat daher, da die Integration nach θ unmittelbar ausführbar ist:

$$(29)\qquad u = (\theta_1 - \theta_0) \int_{\pm g_0}^{g_1} \int_{\sqrt{\varepsilon^2 - p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \rho p)\, dp\, r\, dr.$$

Im zweiten Falle schneidet die zweite Parallelebene (24) beide Kugelflächen, die erste aber schneidet nur die äußere Kugel. Dem entsprechend theilen wir das Intervall für p in (21) in:

$$\pm g_0 < p < \varepsilon \quad \text{und} \quad \varepsilon < p < g_1,$$

im ersten Intervall ist die allgemeine Grenzbedingung (28) für r durchaus reel erfüllbar, man hat daher wieder

$$\sqrt{\varepsilon^2 - p^2} < r < \sqrt{1 - p^2};$$

im zweiten Intervall hingegen ist $\sqrt{\varepsilon^2 - p^2}$ beständig imaginär, daher sind die reelen Grenzen für r:

$$0 < r < \sqrt{1 - p^2},$$

welche auch die allgemeine Grenzbedingung (21) erfüllen, denn hieraus folgt:

$$p^2 < p^2 + r^2 < 1, \text{ um so mehr } \varepsilon^2 < p^2 + r^2 < 1.$$

Hiernach wird mit Integration nach θ:

(30)

$$u = (\theta_1 - \theta_0)\left\{\int_{\pm g_0}^{\varepsilon}\int_{\sqrt{\varepsilon^2-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2+r^2, \rho p)dprdr + \int_{\varepsilon}^{g_1}\int_{0}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2+r^2, \rho p)dprdr\right\},$$

worin das untere Zeichen zu nehmen ist, wenn die Parallelebenen (24) den Kugelmittelpunkt zwischen sich enthalten.

Im dritten Fall schneiden die Parallelebenen nur die äußere Kugel, denn es ist gleichzeitig:

$$g_0 > \varepsilon, \quad g_1 > \varepsilon,$$

p ist in seinem Intervall beständig größer als ε, daher $\sqrt{\varepsilon^2 - p^2}$ durchaus imaginär und die Grenzen für r sind:

$$0 < r < \sqrt{1-p^2},$$

wie im zweiten Integrale der vorigen Discussion. Wird wieder nach θ integrirt, so folgt:

$$(31) \qquad u = (\theta_1 - \theta_0)\int_{\pm g_0}^{g_1}\int_{0}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \rho p)\, dprdr,$$

welcher Ausdruck unabhängig ist von ε, da die bezügliche Kugelfläche von keiner der Parallelebenen geschnitten wird.

§. 4.

Wären wir unter übrigens gleichen Umständen von folgendem allgemeineren Integrale ausgegangen:

(32)

$$U = \iiint F\left(x^2+y^2+z^2, \alpha x+\beta y+\gamma z, \frac{\beta(\alpha y-\beta x)+\gamma(\alpha z-\gamma x)}{\rho(\gamma y-\beta z)}\right)dxdydz,$$

so erhielten wir als Transformation:

$$(33) \qquad U = \iiint F(p^2 + r^2, \ \rho p, \operatorname{tg}\theta)\, dp\, r\, dr\, d\theta,$$

die Integration nach θ kann nun nicht vollzogen werden und an die Stelle der Gleichungen (29), (30), (31) treten die folgenden, welche wieder auf die in (27) unterschiedenen drei Fälle zu beziehen sind:

$$(34)\qquad U=\int_{\pm g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{\varepsilon^2-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}}\int_{\theta_0}^{\theta_1} F(p^2+r^2,\ \rho p,\ \mathrm{tg}\,\theta)\,dp\,r\,dr\,d\theta,$$

(35)

$$U=\int_{\pm g_0}^{\varepsilon}\int_{\sqrt{\varepsilon^2-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}}\int_{\theta_0}^{\theta_1} F(p^2+r^2,\rho p,\mathrm{tg}\theta)\,dprdrd\theta+\int_{\varepsilon}^{g_1}\int_{0}^{\sqrt{1-p^2}}\int_{\theta_0}^{\theta_1} F(p^2+r^2,\rho p,\mathrm{tg}\theta)\,dprdrd\theta,$$

$$(36)\qquad U=\int_{\pm g_0}^{g_1}\int_{0}^{\sqrt{1-p^2}}\int_{\theta_0}^{\theta_1} F(p^2+r^2,\ \rho p,\ \mathrm{tg}\,\theta)\,dp\,r\,dr\,d\theta.$$

Diese Resultate lassen sich noch wesentlich verallgemeinern, wenn man erstens in dem Integrale (32) neue Variabele einführend $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ statt x, y, z setzt, unter a, b, c positive Constante verstanden und zweitens in den Gleichungen (32), (34), (35), (36) α, β, γ durch $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ ersetzt. Hierdurch verwandelt sich U nach Multiplication mit abc in:

(37)

$$V=\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z,\ \frac{bc\{\beta(a^2\alpha y-b^2\beta x)+\gamma(a^2\alpha z-c^2\gamma x)\}}{a\rho(c^2\gamma y-b^2\beta z)}\right)dxdydz$$

und hierin sind die Bedingungen der Integrationen:

$$(38)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2<\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1, \\ \pm g_0\rho<\alpha x+\beta y+\gamma z<g_1\rho \\ t_0<\frac{bc\{\beta(a^2\alpha y-b^2\beta x)+\gamma(a^2\alpha z-c^2\gamma x)\}}{a\rho(c^2\gamma y-b^2\beta z)}<t_1, \end{cases}$$

mit

$$(39)\qquad \rho=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}.$$

Im geometrischen Sinne heißt dieses, die Integrationen sind auf alle Punkte (xyz) des Raumes auszudehnen, welche enthalten sind zwischen den concentrischen, ähnlichen und gleichliegenden Ellipsoiden:

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\varepsilon^2, \end{cases}$$

zwischen den parallelen Ebenen:

$$(41)\qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=g_1\rho, \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\pm g_0\rho \end{cases}$$

und zwischen den beiden durch den Ursprung gehenden Ebenen:

$$(42)\ \begin{cases} bc(b^2\beta^2+c^2\gamma^2)x+ac(c\gamma\rho t_1-ab\alpha\beta)y-ab(b\beta\rho t_1+ac\alpha\gamma)z=0, \\ bc(b^2\beta^2+c^2\gamma^2)x+ac(c\gamma\rho t_0-ab\alpha\beta)y-ab(b\beta\rho t_0+ac\alpha\gamma)z=0. \end{cases}$$

Die Gleichung einer das erste Ellipsoid (40) berührenden Ebene, welche parallel zu den Grenzebenen (41) ist, lautet bekanntlich:

$$(43)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=\pm\rho$$

und die Coordinaten des Berührungspunktes sind:

$$(44)\qquad x_1=\pm\frac{a^2\alpha}{\rho},\quad y_1=\pm\frac{b^2\beta}{\rho},\quad z_1=\pm\frac{c^2\gamma}{\rho},$$

wobei sich die oberen und unteren Zeichen aufeinander beziehen. Diese Werthe statt x, y, z in die Gleichungen (42) gesetzt, leisten denselben Genüge, daher geht die Durchschnittsgerade der Ebenen (42) durch die Mittelpunkte aller elliptischen Schnitte, welche parallel zu den Grenzebenen (41) sind.

Auf das Integrale V sind nun die Formeln (34), (35), (36) unmittelbar anzuwenden und zwar ist mit ρ aus (39):

$$(45)\qquad V=abc\,.\,U,$$

die drei in U unterschiedenen Fälle entsprechen auch hier den Bedingungen (27). Durch die auch hier geltende Voraussetzung (26) liegt das zweite Ellipsoid im Inneren des ersten. Im ersten Falle schneiden die Parallelebenen (41) beide Ellipsoide; im zweiten Falle schneidet nur die zweite dieser Ebenen beide Ellipsoide und im dritten Falle schneiden beide Ebenen (41) nur das erste Ellipsoid.

§. 5.

Läßt man in dem Integrale V den dritten unter dem Functionszeichen F stehenden Ausdruck weg, so kann in der auf p, r, θ bezüglichen Transformation nach θ integrirt werden und man erhält nach dem Vorhergehenden leicht, wenn

$$(46)\qquad W = \iiint F\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},\ \alpha x + \beta y + \gamma z\right) dx\, dy\, dz$$

gesetzt wird:

$$(47)\qquad W = abc(\theta_1 - \theta_0)\int_{\pm g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{\varepsilon^2-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2,\ \rho p)\, dp\, r\, dr,$$

$$(48)$$

$$W = abc(\theta_1 - \theta_0)\left\{\int_{\pm g_0}^{\varepsilon}\int_{\sqrt{\varepsilon^2-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \rho p)\, dp\, r\, dr + \int_{\varepsilon}^{g_1}\int_{0}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2, \rho p)\, dp\, r\, dr\right\},$$

$$(49)\qquad W = abc(\theta_1 - \theta_0)\int_{\pm g_0}^{g_1}\int_{0}^{\sqrt{1-p^2}} F(p^2 + r^2,\ \rho p)\, dp\, r\, dr,$$

wobei die Integrationsbedingungen (38) unverändert giltig bleiben, ρ den Werth aus (39) hat und die drei Voraussetzungen (27) der Ordnung nach den drei Werthen von W entsprechen.

Setzt man in (46) speciell die Function $F = 1$, so geht W über in das Volumen eines Körpers, welcher begrenzt wird von den beiden concentrischen, ähnlichen und gleichliegenden Ellipsoiden (40), von den Parallelebenen (41) und von den beiden durch den Mittelpunkt der Ellipsoide gehenden Ebenen (42), von welchen wir oben nachgewiesen haben, daß ihre Durchschnittslinie durch den Berührungspunkt einer das erste Ellipsoid tangirenden Ebene geht, welche parallel zu den Grenzebenen (41) ist.

In diesem Falle sind die Integrationen in (47), (48), (49) nach und nach ausführbar und wenn S das gedachte Volumen bezeichnet, so wird entsprechend den drei Voraussetzungen (27):

$$S_1 = \frac{1}{2} abc(\theta_1 - \theta_0)(1 - \varepsilon^2)(g_1 \mp g_0), \tag{50}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} abc(\theta_1 - \theta_0)\{(1 - \varepsilon^2)(\varepsilon \mp g_0) + (g_1 - \varepsilon) - \frac{1}{3}(g_1^3 - \varepsilon^3)\}, \tag{51}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} abc(\theta_1 - \theta_0)\{g_1 - \frac{1}{3} g_1^3 \mp (g_0 - \frac{1}{3} g_0^3)\}. \tag{52}$$

Fig. 2, 3, 4 zeigen die verschiedenen Begrenzungen der durch diese drei Formeln bestimmten Räume.

Fig. 2.

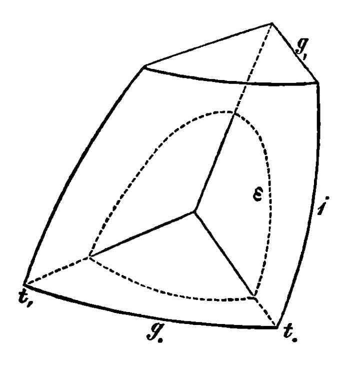


Fig. 3.

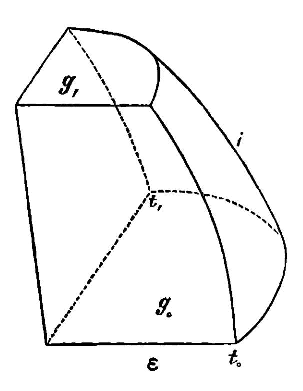


Fig. 4.

Für $\theta_1 = 2\pi$, $\theta_0 = 0$ gibt die letzte derselben den Inhalt einer Schichte des ersten Ellipsoides, zwischen den parallelen Ebenen (41).

Wird noch $g_1 = 1$, $g_0 = g$ gesetzt $g < 1$, so geht die erste der Ebenen (41) in eine berührende Ebene über und man erhält:

$$S = \frac{\pi}{3} abc(2 \mp 3g \pm g^3), \tag{53}$$

als Inhalt des Segmentes, welches die Ebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \pm g\rho, \tag{54}$$

von dem Ellipsoid:

$$(40) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

abschneidet. Dabei gelten die unteren Zeichen, wenn S jenes Segment bezeichnet, welches den Mittelpunkt des Ellipsoides enthält.

Die Größe g in der Gleichung (54), durch welche S bestimmt wird, kann offenbar auch aufgefaßt werden als Verhältniß der Entfernungen der schneidenden Ebene und einer parallelen tangirenden Ebene (43) vom Mittelpunkt der Fläche.

Die Bedingung $g < 1$ ist zugleich das analytische Kennzeichen, daß die Ebene das Ellipsoid schneidet.

Die Ebene (54) ist offenbar eine tangirende Ebene des Ellipsoides:

$$(55) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = g^2$$

und da der Ausdruck für S nur von g abhängt, von α, β, γ aber unabhängig ist, so hat das Segment S für alle solche Berührungsebenen denselben Inhalt.

Dieses letzte Resultat stimmt mit den Ergebnissen überein, welche wir 1857 in Grunert's Archiv (Thl. 28, p. 52) über die Segmente des Ellipsoides und des zweitheiligen Hyperboloides auf ganz anderem Wege entwickelt haben [1]).

Die durch die Gleichungen (1) bewirkte Transformation des Integrales (14) leistet, wie die Gleichung (18) zeigt, für drei Veränderliche x, y, z denselben Dienst, wie jene bekannte von Euler herrührende mit $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ für zwei und hiermit ist zugleich der Weg angedeutet für die einer größeren Anzahl von Variabelen entsprechenden Substitutionen.

Die vorhergehende Untersuchung zeigt, daß zur vollständigen Bestimmung des dreifachen Integrals auch drei sich nicht gänzlich widersprechende Bedingungen nothwendig sind und es ist leicht zu erweisen, daß zur Auswerthung eines mehrfachen Integrales über-

---

[1]) S. a. Sitzungsberichte, Bd. LX, II. Abth. p. 631.

haupt so viele sich nicht vollständig widersprechende Bedingungen einzuführen sind, als Variabele in demselben vorkommen.

Werden weniger Bedingungen eingeführt, so kann das mehrfache Integrale zuweilen einen bestimmten Werth erlangen, welcher aber ebenso einem speciellen Falle zu vergleichen ist, wie die Oberfläche des ganzen Ellipsoides gegenüber der Begrenzung der in Fig. 2, 3, 4 dargestellten Räume.

Hiermit sind zu vergleichen die Arbeiten von E. Catalan, A. Cayley (Journal de Liouville, 1843, T. VIII, p. 239, 1848, T. XIII, p. 245), O. Schlömilch (Sitzungsberichte der kön. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1857, Compendium der h. Analysis 1866, Bd. II, p. 469, 30), 33), 35)) und A. Genocchi (Annali di scienze mat. 1857, T. VIII, p. 284).